Septembre 2016

Université Mohammed V-Rabat
Faculté des Sciences-Département de Physique
Rabat

Epreuve de Mécanique Quantique
Evaluation Master Physique-Mathématique

Aucun document n'est autorisé. La durée de l'épreuve est 90 mn.
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Certains systèmes quantiques sont tels que les seules observables sont celles du moment cinétique (ou des fonctions de ces observables). L'ECOC $\{J^2, J_z\}$ est particulierement adapté aux calculs des spectres de tels systèmes. Les états propres du moment cinétique sont caractérisés par les vecteurs $|j,m\rangle$ avec $j(j+1)$ et m sont des nombres quantiques qui distinguent respectivement les valeurs propres des observables J^2 et J_z. Dans ce problème, nous allons adopter une nouvelle notation des états propres $|j,m\rangle$. Pour une valeur de j fixée, **on identifie** $|j,m\rangle$ **avec le vecteur** $|\psi_n\rangle$ **en posant** $n = j + m$. L'ensemble des états d'un moment cinétique j se reécrit alors $\mathcal{E}_{2j+1} = \{|\psi_n\rangle, n = 0, 1, \cdots, 2j\}$. Pour $j = 1/2$, cet ensemble se réduit à $\mathcal{E}_2 = \{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$.

Partie A: Système à deux niveaux et spin 1/2

Soit $\mathcal{E}_2$ l'espace orthonormé $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$ des états d'un système à deux niveaux. Le hamiltonien du système est donné par

$$H_0 = \hbar|\psi_1\rangle\langle\psi_1|.$$

1. Préciser les valeurs propres et les vecteurs propres de H_0.

2. On définit les opérateurs

$$f^+ = |\psi_1\rangle\langle\psi_0|; \quad f^- = |\psi_0\rangle\langle\psi_1|.$$

Calculer l'anti-commutaeur $\{f^+, f^-\}$ et les puissances $(f^+)^2$ et $(f^-)^2$.

3. Calculer $[H_0, f^+]$ et $[H_0, f^-]$ et vérifier que les opérateurs $\hbar f^+$, $\hbar f^-$ et $(H_0 - \frac{\hbar}{2}\mathbf{I})$ satisfont les relations de commutation du moment cinétique. $\mathbf{I}$ est l'opérateur identité.

4. Soit z un nombre complexe. Calculer le vecteur $e^{zf^+}|\psi_0\rangle$ et donner sa norme.

5. On définit l'état

$$|z\rangle = \frac{e^{zf^+}|\psi_0\rangle}{\sqrt{\langle\psi_0|e^{\bar{z}f^-}e^{zf^+}|\psi_0\rangle}}.$$

Donner l'expression du vecteur $|z\rangle$ dans la base $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$.

6. On définit les opérateurs

$$f_1 = |\psi_0\rangle\langle\psi_1| + |\psi_1\rangle\langle\psi_0|; \quad f_2 = -i|\psi_0\rangle\langle\psi_1| + i|\psi_1\rangle\langle\psi_0|; \quad f_3 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|.$$

Calculer les valeurs moyennes $\langle f_1\rangle$, $\langle f_2\rangle$ et $\langle f_3\rangle$ des opérateurs f_1, f_2 et f_3 dans l'état $|z\rangle$.
7. Vérifier que

$$\langle f_1\rangle^2 + \langle f_2\rangle^2 + \langle f_3\rangle^2 = 1$$

8. On définit l'opérateur densité $\rho(z)$ par

$$\rho(z) = |z\rangle\langle z|$$

Vérifier que $\rho(z)$ est projecteur et montrer que $\mathrm{Tr}(\rho(z)f_i) = \langle z|f_i|z\rangle$.
9. Montrer que l'opérateur $\rho(z)$ peut être écrit sous la forme

$$\rho(z) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} + \sum_{i=1}^{3} \langle f_i\rangle \; f_i\right)$$

où **I** désigne l'opérateur identité.

Partie B: Système quantique à $d = 2j + 1$ niveaux.

Soit un système quantique de moment cinétique j. Son Hamiltonien H est définit par

$$H = \sum_{n=0}^{2j} n\hbar|\psi_n\rangle\langle\psi_n|. \tag{1}$$

1. Déterminer les états propres et les valeurs propres de H et spécifier la dégénérescence de chaque niveau.
2. Rappeler les actions des opérateurs J_+ et J_- sur les états $|j, m\rangle$ et vérifier qu'ils s'écrivent aussi comme

$$J_+ = \sum_{n=0}^{2j-1} \hbar\sqrt{(n+1)(2j-n)} \; |\psi_{n+1}\rangle\langle\psi_n|; \quad J_- = \sum_{n=1}^{2j} \hbar\sqrt{n(2j+1-n)} \; |\psi_{n-1}\rangle\langle\psi_n|. \tag{2}$$

3. En utilisant les expressions (1) et (2), exprimer le commutateur $[J_+, J_-]$ en fonction du Hamiltonien H et de l'opérateur identité.
4. Montrer que

$$(J_+)^k|\psi_0\rangle = 0 \;\; \text{pour} \;\; k \geq 2j + 1$$

5. Montrer que

$$\exp\left(\frac{zJ_+}{\hbar}\right)|\psi_0\rangle = \sum_{n=0}^{2j} z^n \sqrt{\frac{(2j)!}{n!(2j-n)!}}|\psi_n\rangle$$

et déduire que la norme $\mathcal{N}(z)$ du vecteur $e^{\frac{zJ_+}{\hbar}}|\psi_0\rangle$ est donnée par $\mathcal{N}(z) = (1 + z\bar{z})^j$.